



TD n°7: Un peu d'analyse fonctionnelle

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Théorème de Montel

Exercice 1. Une application du théorème de Montel.

Soient $a < b$ deux réels et $U = \{z \in \mathbb{C}, a < \Re(z) < b, \Im(z) > 0\}$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ bornée. Supposons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c + iy) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow \infty$. Montrer que $f(x + iy) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow \infty$ pour tout $x \in]a, b[$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in]a, b[$ et y_n une suite de réels tendant vers $+\infty$ tel que $|f(x + iy_n)| > \delta$ pour tout $n \geq 0$. Notons $g_n \in \mathcal{O}(U)$ la fonction définie par $g_n(z) = f(z + iy_n)$. Par le théorème de Montel, la famille $(g_n)_n$ est normale et on peut trouver une extraction $\phi(n) \rightarrow +\infty$ tel que $g_{\phi(n)}$ converge vers une fonction $g \in \mathcal{O}(U)$. Par l'hypothèse sur f , on doit avoir $g(c + iy) = 0$ pour tout $y > 0$, donc g s'annule sur un ensemble possédant un point d'accumulation et on a donc $g = 0$. Or on doit avoir $|g(x)| > \delta$, on aboutit à une contradiction (il y a une petite difficulté liée au fait que g n'est pas vraiment holomorphe sur l'intervalle réel $]a, b[$ mais l'argument est facilement adaptable).

Exercice 2. Limite simple de fonctions holomorphes.

1. Soient U un ouvert non vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge simplement vers une fonction f . Montrer qu'il existe un ouvert non vide V dont l'adhérence est contenue dans U et un réel $M > 0$ tels que :

$$\forall z \in V, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leq M.$$

Fixons V un ouvert tel que $\bar{V} \subset U$. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$S_k = \{z \in \bar{V}, |f_j(z)| \leq k, \forall j \in \mathbb{N}^*\}.$$

En utilisant la continuité des f_j on montre que S_k est fermé dans \mathbb{C} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \bar{V}$, comme $(f_j(z))_j$ converge pour tout $z \in U$, on a $z \in S_k$ pour un certain $k > 0$. Il suit que: $\bar{V} = \bigcup_k S_k$. Par la contraposée du théorème de Baire, l'un des S_k doit être d'intérieur non vide. Le résultat de la question suit.

2. En déduire qu'une limite simple de fonctions de $\mathcal{O}(U)$ est holomorphe sur un ouvert dense dans U .
Par le théorème de Montel, sur chaque ouvert où la famille $(f_k)_k$ est uniformément bornée, on a f qui est holomorphe. Pour tout $z \in U$ et $\rho > 0$, on peut trouver par la question précédente un petit ouvert $V_{z,\rho} \subset D(z,\rho)$ tel que la famille $(f_k)_k$ est uniformément bornée sur $V_{z,\rho}$, donc f y est holomorphe. L'union de tous les $V_{z,\rho}$ fournit l'ouvert recherché.

Exercice 3. Une suite bien connue.

Pour $n > 0$, on définit $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Démontrer à l'aide du théorème de Montel que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une limite à déterminer.

On va utiliser le théorème de Montel pour montrer la convergence. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $A = \sup_{z \in K} |z|$. Pour $z \in K$, $n \geq 1$ un entier, on a

$$|f_n(z)| \leq \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n$$

la dernière suite étant convergente dans \mathbb{R} , donc bornée, on en déduit que $\mathcal{F} = \{f_n; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est une partie bornée. Considérons $(g_n)_n$ une sous-suite convergente de \mathcal{F} et notons g sa limite. On en déduit que $g(0) = 1$ et comme

$$g'_n(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} g_n(z),$$

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

on en déduit à la limite que $g' = g$. Ainsi $z \mapsto e^{-z}g(z)$ est de dérivée nulle sur le connexe \mathbb{C} elle est constante et donc $g(z) = e^z$. On a montré que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{g\}$ et $g \notin \mathcal{F}$ puisque ce n'est pas un polynôme. Par le théorème de Montel, $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ et on a montré que g était la seule valeur d'adhérence de \mathcal{F} . Ainsi on a montré que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact vers $z \mapsto e^z$.

 **Exercice 4. Une famille normale.**

Soit $p \geq 1$, on note \mathcal{F}_p l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} vérifiant $|f|_{L^p} \leq 1$.

1. Soit $r < 1$ et $r < \rho < 1$. Démontrer que pour $z \in \overline{\mathbb{D}}(0, r)$, on a

$$|f(z)|^p \leq \frac{\rho}{2\pi(\rho - r)^p} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta.$$

On utilise la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{z - \rho e^{i\theta}} \rho e^{i\theta} d\theta.$$

On prend les valeurs absolues, et on trouve

$$|f(z)| \leq \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|z - \rho e^{i\theta}|} d\theta \leq \frac{\rho}{2\pi(\rho - |z|)} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| d\theta.$$

Comme $t \mapsto t^p$ est convexe et que $\frac{d\theta}{2\pi}$ a une masse totale de 1 sur $[0, 2\pi]$, on peut appliquer l'inégalité de Jensen et on a

$$|f(z)|^p \leq \frac{\rho^p}{2\pi(\rho - |z|)^p} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Comme $p \geq 1$ et $\rho < 1$, on a $\rho^p < \rho$. En vérifiant que $|z| \leq r$, on obtient finalement l'inégalité voulue, à savoir

$$|f(z)|^p \leq \frac{\rho}{2\pi(\rho - r)^p} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$(1 - r - \varepsilon)|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon^p} \int_{|w| \geq r + \varepsilon} |f(w)|^p d\lambda(w).$$

Pour $\rho \geq r + \varepsilon$, on a $\frac{1}{(\rho - r)^p} \leq \frac{1}{\varepsilon^p}$ et donc

$$|f(z)|^p \leq \frac{\rho}{2\pi\varepsilon^p} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta.$$

En intégrant de $r + \varepsilon$ à 1, on obtient

$$(1 - r - \varepsilon)|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon^p} \int_{r+\varepsilon}^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \rho d\rho = \frac{1}{2\pi\varepsilon^p} \int_{|w| \geq r + \varepsilon} |f(w)|^p d\lambda(w).$$

3. Dédurre à l'aide du théorème de Montel que la famille \mathcal{F}_p est normale.

Comme $\int_{|w| \geq r + \varepsilon} |f(w)|^p d\lambda(w) \leq 1$, on a

$$\sup_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/p} (1 - r - \varepsilon)^{1/p} \varepsilon}$$

ce qui prouve que \mathcal{F}_p est uniformément bornée sur $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$, et donc sur tout compact de \mathbb{D} .

Exercice 5. Une partie compacte de $\mathcal{O}(U)$.

1. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} et $a \in U$. Notons:

$$\mathcal{F}_a = \{f \in \mathcal{O}(U) : f \text{ injective, } f(a) = 0, \sup_{z \in U} |f(z)| \leq 1\}.$$

Démontrer que si elle est non-vide, \mathcal{F}_a est une partie relativement compacte de $\mathcal{O}(U)$, dont l'adhérence contient 0.

C'est une application directe du théorème de Montel. Si $f \in \mathcal{F}_a$, alors $\frac{1}{n}f \rightarrow 0$ donc $0 \in \overline{\mathcal{F}_a}$.

2. Démontrer que $\mathcal{F}_a \cup \{0\}$ est fermée, donc compacte.

Les conditions $f(a) = 0$ et $\sup_z |f(z)| \leq 1$ sont clairement des conditions fermées. Le théorème de Hurwitz (une limite de fonctions injective est injective ou constante) démontre que f injective ou constante est une condition fermée, et comme $f(a) = 0$, cette condition se ramène à f injective ou nulle, ainsi, $\mathcal{F}_a \cup \{0\}$ est fermé et est donc l'adhérence de \mathcal{F}_a .

Exercice 6. L'algèbre du disque et sa boule unité.

On note $A(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions continues sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui sont holomorphes sur le disque unité ouvert \mathbb{D} .

1. Démontrer que $A(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre fermée de l'algèbre $C(\overline{\mathbb{D}})$ des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ avec la norme $\sup |\cdot|_\infty$.

Si $(f_n)_n \in A(\mathbb{D})$, et $f_n \rightarrow f \in C^0(\overline{\mathbb{D}})$ uniformément, en particulier $f_n \rightarrow f$ uniformément sur sur (tout compact de) \mathbb{D} et f est donc holomorphe sur \mathbb{D} .

2. Vérifier que $A(\mathbb{D})$ n'est pas stable par dérivation.

On peut par exemple considérer

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$$

qui appartient clairement à $A(\mathbb{D})$ vu que la série converge absolument en tout point du disque. La dérivée de $\text{Li}_2(z)$ est $\frac{-\log(1-z)}{z}$, qui n'est pas bornée au voisinage de 1 et ne peut donc pas se prolonger en une fonction continue sur le cercle.

3. Démontrer que l'algèbre $\mathbb{C}[z]$ des polynômes est dense dans $A(\mathbb{D})$.

Soit $f \in A(\mathbb{D})$, on veut montrer qu'il existe un polynôme à distance $< \varepsilon$ de f . On commence par choisir $r < 1$ tel que $|f(rz) - f(z)|_\infty < \varepsilon/2$, qui existe car $r \mapsto |f(rz) - f(z)|_\infty$ est continue par uniforme continuité de f sur \mathbb{D} . Ensuite, comme f est somme d'une série entière de rayon de convergence 1, on constate que $f(rz)$ est définie par une série entière qui converge absolument sur tout compact de $\mathbb{D}(0, 1/r)$, en particulier sur \mathbb{D} . On obtient donc un polynôme (une somme partielle de cette fonction d'assez haut degré) vérifiant $|f(rz) - P(z)|_\infty < \varepsilon/2$. On a donc

$$|f(z) - P(z)| \leq |f(z) - f(rz)| + |f(rz) - P(z)| < \varepsilon.$$

On introduit, pour $|a| < 1$, le facteur de Blaschke

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

4. Démontrer que $|z| = 1 \implies |\varphi_a(z)| = 1$ et en déduire que φ_a envoie \mathbb{D} dans \mathbb{D} .

Si $|z| = 1$ alors on a

$$|z - a| = |z| \cdot |1 - \bar{a}z| = |1 - \bar{a}z|.$$

Par le principe du maximum, et comme φ_a est non-constante, on a $|\varphi_a(z)| < 1$ si $|z| < 1$.

5. Soit $f \in A(\mathbb{D})$ unimodulaire, c'est-à-dire que $|z| = 1 \implies |f(z)| = 1$. Démontrer que f est un produit fini de φ_a et d'un nombre complexe de module 1.

Indication : on pourra démontrer qu'une $g \in A(\mathbb{D})$ unimodulaire sans zéros est constante.

Commençons par prouver l'indication : si $g \in A(\mathbb{D})$ est unimodulaire et sans zéros, alors $1/g \in A(\mathbb{D})$. Par le principe du maximum, on a $|1/g| \leq 1$ et $|g| \leq 1$ donc g est constante de module 1.

Soit à présent $f \in A(\mathbb{D})$ unimodulaire. Comme elle est uniformément continue, il existe $r < 1$ telle que $|z| \geq r \implies |f(z)| \geq \frac{1}{2}$. Il en découle, par le principe des zéros isolés, que f a un nombre fini de zéros, disons a_1, \dots, a_m (comptés avec multiplicité). La fonction $\varphi(z) = \prod_{j=1}^m \varphi_{a_j}(z)$ est également unimodulaire et f/φ est donc unimodulaire et sans zéros, donc constante, ce qui conclut.

6. Soit $f \in \mathbb{C}[z]$ de degré d vérifiant $|f|_\infty < 1$, on note $f^*(z) = z^d \overline{f(1/\bar{z})}$. Démontrer que

$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} z^d + f(z)}{1 + f^*(z) e^{it}} dt$$

C'est une application de la formule de Cauchy à la fonction $w \mapsto \frac{wz^d + f(z)}{1 + f^*(z)w}$.

7. En déduire que l'enveloppe convexe fermée des unimodulaires est la boule unité fermée. Le résultat précédent démontre que f est intégrale d'unimodulaires - en effet,

$$f_t : z \mapsto \frac{e^{it} z^d + f(z)}{1 + f^*(z) e^{it}}$$

est unimodulaire car pour $|z| = 1$ on a $f^*(z) = z^d \overline{f(z)}$, et donc

$$|e^{it} z^d + f(z)| = |z|^d |e^{it} + \bar{z}^d f(z)| = |1 + z^d \overline{f(z)} e^{it}|.$$

On a donc écrit f comme une intégrale d'unimodulaires. Vu que $t \mapsto f_t$ est continue uniformément en z , les sommes de Riemann correspondant à l'intégrale convergent uniformément vers f . Ces sommes de Riemann sont des combinaisons convexes d'unimodulaires, et donc tout polynôme f de norme < 1 appartient à l'enveloppe convexe fermée des unimodulaires. Comme l'ensemble des polynômes de norme < 1 est dense dans la boule unité, on peut conclure.

Exercice 7. Propriété universelle de l'algèbre du disque.

Un \mathbb{C} -espace de Banach $(B, |\cdot|_B)$ est appelé \mathbb{C} -algèbre de Banach, ou juste algèbre de Banach, si B est muni d'une structure de \mathbb{C} -algèbre associative unitaire (mais pas nécessairement commutative) pour laquelle la norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que $|bb'|_B \leq |b|_B |b'|_B$.

1. Démontrer que la multiplication est continue de B^2 dans B .

On omet le B en indice pour la norme. Si $b_n \rightarrow b$, $b'_n \rightarrow b'$, alors

$$\begin{aligned} |bb' - b_n b'_n| &= |bb' - b_n b' + b_n b' - b_n b'_n| \\ &\leq |bb' - b_n b'| + |b_n b' - b_n b'_n| \\ &\leq |b - b_n| \cdot |b'| + |b_n| \cdot |b' - b'_n|. \end{aligned}$$

En prenant $n \rightarrow \infty$, on a convergence vers 0.

2. Vérifier que $A(\mathbb{D})$ est une algèbre de Banach, ainsi que $C(X, \mathbb{C})$ pour un compact X .

La norme $\sup |\cdot|_{\infty, X}$ vérifie l'inégalité voulue car $\sup_{x \in X} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| \sup_{x \in X} |g(x)|$. Comme $A(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre fermée de $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, elle est complète et c'est une algèbre de Banach.

On dit qu'un élément $b \in B$ est polynomialement borné s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$, on a

$$|P(b)| \leq C |P|_\infty.$$

On note $\text{PB}(B)$ l'ensemble des éléments polynomialement bornés de B .

3. Démontrer que l'application $\varphi \mapsto \varphi(z)$ induit une bijection

$$\text{Hom}_{\text{alg}}(A(\mathbb{D}), B) \xrightarrow{\sim} \text{PB}(B)$$

où Hom_{alg} désigne les morphismes continus de \mathbb{C} -algèbres. Démontrer également que cette bijection est continue pour la topologie de la convergence simple à gauche et la topologie de sous-espace de B à droite. Comme φ est continue, elle est entièrement déterminée par son image sur le sous-espace dense $\mathbb{C}[z]$, et comme c'est un morphisme d'algèbres, elle est entièrement déterminée par le générateur z .

Reste à voir que $\varphi(z)$ est polynomialement bornée. L'application φ , comme morphisme d'algèbres continue, est aussi une application linéaire continue, qui vérifie donc que

$$|P(\varphi(z))|_B = |\varphi(P(z))|_B \leq \|\varphi\| \cdot |P(z)|_\infty = \|\varphi\|.$$

L'application réciproque se définit en partant de $b \mapsto (\varphi_b : b \mapsto P(b))$ pour $P \in \mathbb{C}[z]$. Comme b est polynomialement bornée, φ_b est uniformément continue sur $\mathbb{C}[z]$ et s'étend donc en une application linéaire sur $A(\mathbb{D})$ par $\varphi_b(f) = \lim_n P_n(b)$ pour n'importe quelle suite P_n qui converge vers f . Comme la multiplication est continue, et que si $P_n \rightarrow f$, $Q_n \rightarrow g$ uniformément alors $P_n Q_n \rightarrow fg$, on a bien $\varphi_b(fg) = \lim_n \varphi_b(P_n) \varphi_b(Q_n) = \lim_n \varphi_b(P_n) \lim_n \varphi_b(Q_n) = \varphi_b(f) \varphi_b(g)$, et φ est bien un morphisme d'algèbres.

La continuité de $\varphi \mapsto \varphi(z)$ découle directement de la continuité de $\varphi \mapsto \varphi(f)$ pour tout f par définition de la topologie de convergence simple.

4. Dans le cas où B est une sous-algèbre fermée d'un $C(X, \mathbb{C})$ pour X compact, expliciter $PB(B)$ et démontrer que l'application ci-dessus est un homéomorphisme.

$PB(B)$ est la boule unité fermée de B : en effet, si $|f|_\infty > 1$, alors il existe $x \in X$ tel que $|f(x)| > 1$ et donc la suite $(f^n)_n$ n'est pas bornée. Réciproquement, si $|f|_\infty \leq 1$ alors f est à valeurs dans le disque unité fermé et clairement $|P(f)|_\infty \leq \sup_{z \in \mathbb{D}} |P(z)|$.

Pour la continuité de la réciproque, il faut démontrer que $g \mapsto \varphi_g$ est continue. On remarque que $\varphi_g(f) = f \circ g$. Par définition de la topologie de convergence simple, il suffit de prouver que pour tout f , la composition $g \mapsto \varphi_g \mapsto \varphi_g(f) = f \circ g$ est continue, ce qui est clair car $|f \circ g|_\infty \leq |f|_\infty$.

5. En considérant l'algèbre $B = \mathbb{C}[z]/(z^2)$ avec la norme $|a + b[z]| = |a| + |b|$, montrer que l'application réciproque $PB(B) \rightarrow \text{Hom}_{\text{alg}}(A(\mathbb{D}), B)$ n'est pas toujours continue.

Notons η la classe de z , il vérifie $\eta^2 = 0$. On vérifie que c'est bien une algèbre de Banach :

$$|(a + b\eta)(c + d\eta)| = |ac + bc\eta + ad\eta| \leq |ac| + |bc| + |ad|.$$

On vérifie alors que $(|a| + |b|)(|c| + |d|) = |ac| + |bc| + |ad| + |bd| \geq |(a + b\eta)(c + d\eta)|$. On calcule, pour P polynôme, que $P(a + b\eta) = P(a) + bP'(a)\eta$. Ainsi, $a + b\eta$ est borné polynomialement si $|a| < 1$ ou si $b = 0$ et $|a| \leq 1$. Le deuxième cas se passe d'explications, pour le premier on remarque que par la formule de Cauchy on a

$$|P'(a)| \leq \frac{1}{2\pi(1 - |a|)} \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

Ainsi, $\varphi_{a+b\eta}(f) = f(a) + b f'(a)\eta$.

En prenant $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$, on a

$$f(a + b\eta) = f(a) - b \frac{\log(1 - a)}{a} \eta.$$

Si on prend $a_n = 1 - 1/n$, $b_n = \frac{1}{\log \log(n)}$, clairement $a_n + b_n \eta \rightarrow 1(+0\eta)$. Cependant,

$$f(a_n + b_n \eta) = f(a_n) - \frac{1}{\log \log n} \frac{\log(n)}{1 - 1/n} \eta$$

qui diverge quand $n \rightarrow \infty$.

Théorèmes de Runge et Mittag-Leffler.

Exercice 8. Manipulation du théorème de Runge.

1. Soit $K \subsetneq \partial\mathbb{D}$ un compact, $\varepsilon > 0$. Démontrer à l'aide du théorème de Runge qu'il existe un polynôme $P(z)$ vérifiant $P(0) = 1$ et $\sup_{z \in K} |P(z)| < \varepsilon$.

On veut que $P(z)$ soit de la forme $1 + zQ(z)$. Mais

$$\sup_{z \in K} |1 + zQ(z)| = \sup_{z \in K} \left| \frac{1}{z} + Q(z) \right|.$$

On applique le théorème de Runge à la fonction $z \mapsto 1/z$, holomorphe au voisinage de K . $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus K$ est connexe, on peut donc choisir les fonctions rationnelles avec des pôles à l'infini, c'est-à-dire les polynômes. Il existe donc un polynôme Q vérifiant

$$\sup_{z \in K} \left| Q(z) - \frac{1}{z} \right| < \varepsilon$$

ce qui conclut.

2. Démontrer à l'aide du théorème de Runge qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = \begin{cases} 1, & \Re(z) > 0 \\ -1, & \Re(z) < 0. \end{cases}$$

On considère l'ouvert $U = \Re(z) > 0 \cup \Re(z) < 0$, et la fonction holomorphe qui vaut 1 sur $\Re(z) > 0$ et -1 sur $\Re(z) < 0$. On considère une suite de compacts $(K_n)_n$, où K_n est l'union des rectangles fermés de sommets $1/n + in, n + in, n - in, 1/n - in$ et son symétrique par rapport à l'axe $\Re(z) = 0$.

Il existe donc, pour tout m , une suite $(P_{n,m})_m$ de polynômes qui converge vers f sur K_n .

Pour avoir la suite voulue, il faut faire un argument diagonal : Considérons $\varphi(n)$ vérifiant

$$\sup_{z \in K_n} |P_{n, \varphi(n)}(z) - f(z)| < \frac{1}{n}.$$

Quitte à changer n , on peut supposer que φ est croissante, et $P_n := P_{n, \varphi(n)}$ converge uniformément vers f sur tout compact de U .

Exercice 9. Fonctions holomorphes à valeurs de dérivées prescrites.

Démontrer à l'aide du théorème de Weierstrass et de Mittag-Leffler le fait suivant : étant donné un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$, une suite $(z_n)_n$ sans point d'accumulation dans U , une suite $(k_n)_n$ d'entiers strictement positifs, et une collection $(a_{n,k})_{k < k_n}$ de nombres complexes, il existe une fonction holomorphe sur U dont la k -ème dérivée en z_n avec $k < k_n$ est $a_{n,k}$.

Grâce au théorème de Weierstrass, on sait qu'il existe une fonction holomorphe w ayant un zéro d'ordre k_n en z_n . Le théorème de Mittag-Leffler nous fournit une fonction méromorphe g vérifiant

$$g(z) = \sum_{k=1}^{k_n} \frac{b_{k,n}}{(z - z_n)^k} + O(1)$$

au voisinage de tout z_n , pour n'importe quel choix de b .

Le produit $f(z) = g(z)w(z)$ est holomorphe au voisinage de chaque z_n , et on peut calculer que la valeur en z_n de cette fonction est $b_{k_n, n} w^{(k_n)}(z_n)$. Il faut donc choisir $b_{k_n, n} = \frac{a_{k_n, n}}{w^{(k_n)}(z_n)}$.

De manière générale, en développant le produit de Cauchy, on se rend compte que les conditions $f(z_n) = a_{0,n}$, $f'(z_n) = a_{1,n}, \dots, f^{(k_n-1)}(z_n) = a_{k_n-1, n}$ se traduisent en un système d'équations linéaires en les $b_{k,n}$. Ce système est triangulaire, de diagonale $w^{(k_n)}(z_n) \neq 0$, et une solution existe donc. Il faut choisir pour les $a_{k,n}$ de cette façon pour avoir la fonction voulue.

Exercice 10. Quotients de fonctions holomorphes.

Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} . Démontrer que f est un quotient de fonction holomorphes.

On sait que les pôles de f ne s'accumulent pas dans U . Ainsi, par le théorème de Weierstrass, il existe une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(U)$ qui s'annule exactement aux pôles de f à l'ordre l'ordre du pôle de f . Le produit fg définit donc une fonction holomorphe sur U , et on écrit $f = \frac{fg}{g}$.

Exercice 11. $\mathcal{O}(U)$ est un anneau de Bézout.

On fixe un ouvert connexe $U \subseteq \mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$, on note $v_a(f)$ l'ordre d'annulation de f en a , $\text{div}(f) = (v_a(f))_{a \in U}$ et pour $I \subseteq \mathcal{O}(U)$, $\text{div}(I) = (\min_{f \in I} v_a(f))_{a \in U}$. Pour $\mathbf{m} = (m_a)_{a \in U}$, $\mathbf{n} = (n_a)_{a \in U}$, on écrira $\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$ si $m_a \geq n_a$ pour tout a , et on appelle support de \mathbf{n} et note $\text{Supp}(\mathbf{n})$ l'ensemble $\{a \in U : n_a \neq 0\}$.

1. (a) Démontrer que pour $a \in U$, $\mathfrak{m}_a := \{f \in \mathcal{O}(U) : f(a) = 0\}$ est un idéal.

Soit $g \in \mathfrak{m}_a, f \in \mathcal{O}(U)$. $f(a)g(a) = 0$ donc $fg \in \mathfrak{m}_a$. Similairement, si $g, h \in \mathfrak{m}_a$ alors $g(a) + h(a) = 0$ donc $g + h \in \mathfrak{m}_a$. Alternativement, $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(a)$ est un morphisme d'anneaux et son noyau \mathfrak{m}_a est un idéal.

- (b) Plus généralement, si $\mathbf{n} = (n_a)_{a \in U}$, démontrer que

$$I(\mathbf{n}) := \{f \in \mathcal{O}(U) : \text{div}(f) \geq \mathbf{n}\}$$

est un idéal de $\mathcal{O}(U)$ et vérifier que $\mathfrak{m}_a = I(\mathbf{1}_a)$ où $\mathbf{1}_a$ est la famille d'entiers qui vaut 1 en a et 0 partout ailleurs. Démontrer que si $\text{Supp}(\mathbf{n})$ est discret dans U , alors $\text{div}(I(\mathbf{n})) = \mathbf{n}$. Que se

passé-t-il dans le cas contraire ?

Il suffit de vérifier que pour $a \in U$, $v_a(fg) = v_a(f) + v_a(g)$ et $v_a(f+g) \geq \min(v_a(f), v_a(g))$. Ainsi, si $v_a(f), v_a(g) \geq n_a$, $v_a(f+g) \geq n_a$, et si $v_a(g) \geq n_a$ on a $v_a(fg) \geq v_a(g)$.

La condition $V(f) \geq \mathbf{1}_a$ est équivalente à $v_a(f) \geq 1$, ce qui revient à dire $f(a) = 0$, donc $I(\mathbf{1}_a) = \mathfrak{m}_a$. L'inégalité $V(I(\mathbf{n})) \geq \mathbf{n}$ découle de la définition. Par le théorème de Weierstrass, si \mathbf{n} est à support discret (c'est-à-dire que les n_a sont nuls sauf sur un ensemble discret dans U), il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ qui a ses zéros exactement sur le support de \mathbf{n} , avec un zéro d'ordre n_a en a - autrement dit, $\text{div}(f) = \mathbf{n}$.

Si le support de \mathbf{n} n'est pas discret, il admet un point d'accumulation, et donc $I(\mathbf{n}) = 0$ par le théorème des zéros isolés.

- (c) Soit f in $\mathcal{O}(U)$. Démontrer que $(f) = \{fg : g \in \mathcal{O}(U)\}$ est un idéal, qui vérifie $\text{div}((f)) = \text{div}(f)$. Plus généralement, si $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U)$, démontrer que

$$(f_1, \dots, f_m) := \{g_1 f_1 + \dots + g_m f_m : g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}(U)\}$$

est un idéal vérifiant $\text{div}((f_1, \dots, f_m)) \geq (\min_j v_a(f_j))_{a \in U}$.

D'une part, on a $g_1 f_1 + \dots + g_m f_m + h_1 f_1 + \dots + h_m f_m = (g_1 + h_1) f_1 + \dots + (g_m + h_m) f_m$, et d'autre part on a $h \cdot (g_1 f_1 + \dots + g_m f_m) = h g_1 f_1 + \dots + h g_m f_m$, donc (f_1, \dots, f_m) est bien un idéal.

L'égalité $\text{div}((f)) \leq \text{div}(f)$ découle du fait que $f \in (f)$, et réciproquement, si $h \in (f)$ alors $h = gf$ et donc $\text{div}(h) = \text{div}(g) + \text{div}(f) \geq \text{div}(f)$.

Pour le cas de (f_1, \dots, f_m) , on sait que si $g \in (f_1, \dots, f_m)$ alors $g = g_1 f_1 + \dots + g_m f_m$ et donc pour tout $a \in U$ on a

$$v_a(g) \geq \min_i v_a(g_i f_i) \geq \min_i v_a(f_i)$$

d'où l'inégalité $\text{div}((f_1, \dots, f_m)) \geq (\min_i v_a(f_i))_a$.

2. Vérifier que $\text{div}(f) \geq \text{div}(g)$ si et seulement si g divise f , c'est-à-dire s'il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = gh$.

Si $f = gh$, alors $\text{div}(f) = \text{div}(g) + \text{div}(h) \geq \text{div}(g)$. Réciproquement, si $\text{div}(f) \geq \text{div}(g)$, alors $v_a(f) \geq v_a(g)$ pour tout a et donc la fonction méromorphe f/g est en fait holomorphe, donc $f = gf/g$.

3. Soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$ sans zéro commun. Démontrer à l'aide du théorème de Mittag-Leffler qu'il existe $v \in \mathcal{O}(U)$ telle que $\text{div}(1 - vg) \geq \text{div}(f)$.

Soit a un zéro de f , d'ordre n . La condition sur v pour que a soit un zéro d'ordre $\geq n$ de $1 - vg$ se traduit par un système linéaire sur les n premières dérivées de v , à savoir

$$\begin{cases} g(a)v(a) = 1 \\ g'(a)v(a) + g(a)v'(a) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(a) v^{(n-k)}(a) = 0. \end{cases}$$

On peut comprendre ce système comme un système en le vecteur $(v(a), v'(a), \dots, v^{(n)}(a))$. Il est triangulaire inférieur, et sa diagonale est $g(a) \neq 0$, donc il admet une unique solution. Par l'exercice 2, il existe une fonction holomorphe v dont les n premières dérivées sont données par cette solution, et une telle fonction vérifie par construction $\text{div}(1 - vg) \geq \text{div}(f)$.

4. En déduire que pour $f, g \in \mathcal{O}(U)$, il existe $u, v \in \mathcal{O}(U)$ et $h \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $v_a(h) = \min(v_a(f), v_a(g))$ pour tout a , telles que $uf + vg = h$.

Notons h un pgcd de f et g , c'est-à-dire une fonction holomorphe qui s'annule en chaque zéro a de f et de g à l'ordre $\min(v_a(f), v_a(g))$, qui existe par le théorème de Weierstrass. h divise f et g , et $f/h, g/h$ n'ont aucun zéro en commun. Par la question précédente, il existe donc une fonction holomorphe v telle que $1 - vg/h$ divise f/h . Notons u le quotient, on a $uf/h + vg/h = 1$ donc $uf + vg = h$.

5. Soit $I \subseteq \mathcal{O}(U)$ un idéal finiment généré, c'est-à-dire de la forme (f_1, \dots, f_m) . Démontrer que I est de la forme (f) .

On procède par récurrence sur m . D'après la question précédente, l'idéal engendré par f_1, \dots, f_m et celui engendré par $f_1, \dots, f_{m-2}, h_{m-1}$, où h_{m-1} est un pgcd de f_{m-1} et f_m , sont les mêmes car h_{m-1} s'écrit comme combinaison linéaire de f_{m-1} et f_m . On en déduit que I est engendré par $m - 1$ éléments, ce qui conclut par récurrence.

6. Exhiber un idéal qui n'est pas de la forme (f_1, \dots, f_m) .

Il suffit de choisir une suite discrète $(a_n)_n$ et définir $I = \{f \in \mathcal{O}(U) : \forall n \gg 0, f(a_n) = 0\}$. Cet idéal vérifie $\text{div}(I) = 0$, vu que si on considère une fonction f qui a un zéro simple en chaque a_n , les fonctions $\frac{f(z)}{\prod_{n < N} (z - a_n)}$ sont toutes dans I mais n'ont globalement aucun zéro en commun. Pour autant, toute fonction de I s'annule une infinité de fois, et donc en particulier $1 \notin I$.